Бодло
Эдуард
Васильев
ич

Подписано цифровой подписью: Бодло Эдуард Васильевич
DN: c=RU, st=Ростовская область, l=п. Качкан, title=Директор,
o=ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ РОСТОВСКОЙ ОБЛАСТИ
"ОКТЯБРЬСКИЙ АГРАРНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ТЕХНИКУМ",
1.2.643.100.3=120B3033363734323530353535,
1.2.643.3.131.1.1=120C3631323530313637303130 38,
email=oatt_buh@mail.ru, givenName=Эдуард Васильевич,
sn=Бодло, cn=Бодло Эдуард Васильевич
Дата: 2024.10.04 13:05:43 +03'00'

Государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение
Ростовскойобласти
«Октябрьский аграрно-технологический техникум»

Рассмотрено на заседании ПЦК
общеобразовательных дисциплин
Протокол № __ от _____

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ПО ИЗУЧЕНИЮ ТЕМЫ «КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА»

Автор: Борзяк Е.М.
Преподаватель ГБПОУ РО«ОАТТ»

п.Качкан,2023г.

Пояснительная записка.

Методические рекомендации для студентов по изучению темы: «Комплексные числа» составлены в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом по дисциплине «Математика» и отвечают требованиям к реализации основной образовательной программы среднего (полного) общего образования средними специальными учебными заведениями.

Данные методические рекомендации адресованы для студентов обучающихся на первом курсе по всем специальностям

Пособие включает теоретические сведения, необходимые для решения задач. Наличие методических указаний и примеров с подробным решением призвано облегчить освоение учебного материала студентами, и могут быть использованы, как на аудиторных занятиях, так и при самостоятельной работе студентов.

Введение

Понятие о комплексном числе появилось в середине 16 в. Математиков того времени заинтересовал вопрос, получения формул выражающих корни кубического уравнения через его коэффициенты.

В 1545г. была издана книга «Великое искусство, или об алгебраических преобразованиях», в которой Дж.Кардано (1501-1576) опубликовал формулу корней кубического уравнения, открытую его современниками С. дель Ферро(1465-1526) и Н. Тартальей(1500-1557). Обнаружилось, что в случае, когда кубическое уравнение имеет три действительных корня, в формуле Кардана появляются квадратные корни из отрицательного числа. Такие числа называются *мнимыми числами.*

Мнимые числа стали широко использовать при решении уравнений. На рубеже 18 и 19вв. К.Ф. Гаусс назвал мнимые числа «*Комплексными числами*». Он дал им геометрическую интерпретацию и доказал, что каждый многочлен, степень которого не меньше единицы, имеет хотя бы один корень, действительный или комплексный.

В настоящее время комплексные числа широко применяются в математике, физике и технике; их применение часто упрощает решение задач.

1. Понятие мнимой единицы.

Предположим, что существует такое число, квадрат которого равен - 1. Обозначим это число буквой ***i***, тогда справедливо равенство (1):

$$\boxed{\begin{array}{c} i^2 = -1; \\ i = \sqrt{-1} \end{array}}$$

Число *i* будем называть *мнимой единицей,* а равенство (1) будем считать определением мнимой единицы.
Например:
$\sqrt{-36} = \sqrt{36 \cdot (-1)} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{-1} = 6i$

2. Степень мнимой единицы.

Рассмотрим степени мнимой единицы:
$\boldsymbol{i}$**;**
$\boldsymbol{i^2 = -1}$**;**
$\boldsymbol{i^3 = i^2 * i = (-1)i = -i}$**;**
$\boldsymbol{i^4 = i^3 * i = -i * i = -i^2 = -(-1) = 1}$**;**
$\boldsymbol{i^5 = i^4 * i = 1 * i = i}$**;**
$\boldsymbol{i^6 = i^5 * i = i * i = i^2 = -1}$**;**
$\boldsymbol{i^7 = i^6 * i = (-1) * i = -i}$**;**
$\boldsymbol{i^8 = i^7 * i = -i * i = 1}$**;**
……
Таким образом,
- если показатель степени числа *i* делится на 4, то значение степени равно 1;
- если при делении показателя степени на 4 в остатке получается 1, то значение степени равно *i* ;

- если при делении показателя степени на 4 получается остаток 2, то значение степени равно – 1;
- если при делении на 4 остаток равен 3, то значение степени равно – *i*.

Пользуясь этим, можно вычислять любую степень числа *i*.

Например:
а) $i^{28} = 1$ т.к. 28=4*7 (нет остатка)

б) $i^{33} = i$ т.к. 33=4*8+1
в) $i^{135} = -i$ т.к. 135=4*33+3

Задания для самостоятельной работы №1.
Вычислите:
1. i^{66}; i^{143}; i^{216}; i^{137}.
2. $i^{43} + i^{48} + i^{44} + i^{45}$.
3. $(i^{36} + i^{17})i^{23}$.
4. $(i^{133} + i^{115} + i^{200} + i^{142})(i^{17} + i^{36})$.
5. $i^{145} + i^{147} + i^{264} + i^{345} + i^{117}$.
6. $(i^{13} + i^{14} + i^{15})i^{32}$.
7. $(i^{64} + i^{17} + i^{13} + i^{82})(i^{72} - i^{34})$.

3. Основные определения и свойства.

Определение 1. ***Комплексным числом*** называется выражение вида ***a+bi*** , где a и b –действительные числа, а i-мнимая единица. Множество комплексных чисел обозначается через ***C***.

Возможны случаи, когда ***a*** и ***b*** могут быть равные нулю.

- если ***a = 0***, то комплексное число ***bi*** называют мнимым;
- если ***b = 0***, то комплексное число ***a+bi = a*** и называется действительным;
- если ***a =0*** и ***b=0***,то комплексное число ***a+bi=0.***

Определение 2. Комплексные числа $z_1 = a + bi$ и $z_2 = c + di$ называются ***равными***, если *a =c* и *b=d.*

Например:

а) Найти **x** и **y** из равенства **3y+5xi=15-7i**

Решение:

Согласно условию равенства комплексных чисел имеем 3y=15; 5x=-7.Отсюда $x = \frac{-7}{5}; y = 5$

б) Найти **x** и **y** из равенства**(2x+3y) + (x-y)I =7+6i**

Решение: Согласно условию равенства комплексных чисел имеем

$$\begin{cases} 2x+3y=7 \\ x-y=6 \end{cases}$$

Решая систему уравнений получаем: x=5,y=-1

Задания для самостоятельной работы №2.

8–13. Найдите значения ***x*** и ***y*** из равенств:

8. $7x + 5i = 1 - 10iy$. 9. $(2x + y) - i = 5 + (y - x)i$.

10. $x + (3x - y)i = 2 - i$. 11. $(1 + 2i)x + (3 - 5i)y = 1 - 3i$.

12. $(2 - i)x + (1 + i)y = 5 - i$. 13. $(3i - 1)x + (2 - 3i)y = 2 - 3i$.

Определение 3. ***Суммой комплексных чисел*** $z_1 = a + bi$ и $z_2 = c + di$ называется комплексное число вида (a+c)+(b+d)i

Например:

Найти сумму комплексных чисел $z_1 = 2 + (-1)i$ и $z_2 = (-1) + 3i$

Решение:

$$z_1 + z_2 = (2 + (-1)i) + ((-1) + 3i) = (2 + (-1)) + ((-1) + 3)i = 1 + 2i$$

Определение 4. ***Произведением комплексных чисел*** $z_1 = a + bi$ и $z_2 = c + di$ называется комплексное число вида

(ac - bd) + (ad + bc)i

Например:

Найти произведение комплексных чисел $z_1 = 2 + (-3)i$ и $z_2 = (-4) + 3i$

Решение:

$$z_1 z_2 = (2 + (-3))i \cdot ((-4) + 3i) = (2 \cdot (-4) - (-3) \cdot 3) + (2 \cdot 3 + (-3) \cdot (-4))i = 1 + 18i$$

Замечание. При выполнении умножения можно использовать формулы:

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$,

$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab \pm b^3$

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Например

а) $(2 + 3i)^2 = 4 + 2*2*3i + 9i^2 = 4 + 12i - 9 = -5 + 12i$;

б) $(3 - 5i)^2 = 9 - 2*3*5i + 25i^2 = 9 - 30i - 25 = -16 - 30i$;

в) $(5 + 3i)(5 - 3i) = 5^2 - (3i)^2 = 25 - 9i^2 = 25 + 9 = 34$;

г) $(1 + i)(1 - i) = 1^2 - i^2 = 1 + 1 = 2$

Операции суммы и произведения комплексных чисел обладают следующими свойствами:

I. Свойства суммы:

- коммутативности: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$;
- ассоциативности: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$;

II. Свойства произведения:

- коммутативности: $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$;
- ассоциативности: $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$

III. Свойство дистрибутивности: $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 z_3)$

Доказательства приведенных свойств выполните самостоятельно.

Определение 5. ***Алгебраической формой записи комплексного числа*** называется запись вида ***z = a+bi,*** где i-мнимая единица.

Сложение и умножение комплексных чисел, заданных в алгебраической форме, осуществляется по обычным правилам алгебры с учетом равенства $\boldsymbol{i^2 = -1}$.

Например:

Пусть $z_1 = a + bi$; $z_2 = c + di$

По определению: $z_1 \cdot z_2 = (a+bi)\cdot(c+di) =$ (ac - bd) + (ad + bc)i

По свойству: $z_1 \cdot z_2 = (a+bi)\cdot(c+di) = a\cdot c + a\cdot di + c\cdot bi + bi\cdot di =$
$(ac + i^2 bd) + (a\cdot d + c\cdot b)i = (ac - bd) + (ad + cb)i$

Определение 6: Разностью комплексных чисел $z_1 = a + bi$ и $z_2 = c + di$ называется число z = x + yi, которое удовлетворяет равенству $z_2 + z = z_1$ или (c+di)+(x+yi)=a+bi

Разность z чисел z_1 и z_2 обозначается

$z = z_1 - z_2 = (a+bi) - (c+di) = (a-c) + (b-d)i$

Например

Вычислите: (2+6i)−(7+11i)=(2-7)+(6i-11i)= -5-5i

Задания для самостоятельной работы №3.

Вычислите:

14. (3 + 5i) + (7 – 2i). 15. (6 + 2i) + (5 + 3i)
16. (– 2 + 3i) + (7 – 2i). 17. (5 – 4i) + (6 + 2i).
18. (3 – 2i) + (5 + i). 19. (4 + 2i) + (– 3 + 2i).
20. (– 5 + 2i) + (5 + 2i). 21. (– 3 – 5i) + (7 – 2i)
22. (2 + 3i)(5 – 7i). 23. (6 + 4i)(5 + 2i).
24. (3 – 2i)(7 – i). 25. (– 2 + 3i)(3 + 5i).
26. (1 –i)(1 + i). 27. (3 + 2i)(1 + i).
28. (6 + 4i)*3i. 29. (2 – 3i)(– 5i).
30. $(3 + 5i)^2$. 31. $(2 - 7i)^2$
32. $(6 + i)^2$. 33. $(1 - 5i)^2$.
34. $(3 + 2i)^3$. 35. $(3 - 2i)^3$.
36. $(4 + 2i)^3$. 37. $(5 - i)^3$.
38. $(3 + 2i)(3 - 2i)$. 39. $(5 + i)(5 - i)$.
40. $(1 - 3i)(1 + 3i)$. 41. $(7 - 6i)(7 + 6i)$.
42. $(a + bi)(a - bi)$. 43. $(m - ni)(m + ni)$.

Определение 7: Комплексные числа $z = a + bi$ и $\bar{z} = a - bi$ называются **комплексно сопряжёнными**.

Определение 8: Частным комплексных чисел $z_1 = a + bi$ и $z_2 = c + di \neq 0$ называется комплексное число z=x+yi, которое удовлетворяет равенству $z_2 \cdot z = z_1$
или (c+di)(x+yi)=a+bi

Частное z комплексных чисел z_1 и z_2 обозначается

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

Примечание. Отметим, что на практике деление комплексных чисел удобнее выполнять не при помощи непосредственного использования приведённой формулы, а используя равенство: $z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}}$

Например

Вычислить: $\frac{3-i}{1-2i} = \frac{(3-i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{3-i-+6i+2}{1+4} = \frac{5+5i}{5} = 1+i$

Задания для самостоятельной работы №4.

Выполните деление.

44. $\frac{5i}{3+2i}$. **47.** $\frac{3-i}{5-3i}$. **50.** $\frac{3+2i}{5i}$. **53.** $\frac{5-7i}{5+7i}$.

45. $\frac{-2i}{5-i}$. **48.** $\frac{3+2i}{1-5i}$. **51.** $\frac{6-7i}{i}$. **54.** $\frac{1-i}{1+i}$.

46. $\frac{2-3i}{5+2i}$. **49.** $\frac{3-7i}{3+2i}$. **52.** $\frac{2+3i}{2-3i}$. **55.** $\frac{1+i}{1-i}$.

4. Решение квадратных уравнений с действительными коэффициентами.

Обсудим теперь вопрос о том, как решаются квадратные уравнения в комплексных числах. Рассмотрим уравнение $az^2 + bz + c = 0$ где $a \neq 0$,b, c — произвольные комплексные коэффициенты.
Сделаем это на конкретном примере:

а) $x^2 - 6x + 13 = 0$;
Решение:
Найдем дискриминант по формуле
***D* = *b*² – 4*ac*.**
Так как ***a* = 1, *b* = – 6, *c* = 13**, то
***D* = 36 – 4*1*13 = 36 – 52 = – 16;**

$$\sqrt{D} = \sqrt{-16} = \sqrt{16 \cdot (-1)} = 4i.$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}; x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}:$$

$$x_1 = \frac{6 - 4i}{2} = \frac{2(3 - 2i)}{2} = 3 - 2i;$$

$$x_2 = \frac{6 + 4i}{2} = \frac{2(3 + 2i)}{2} = 3 + 2i.$$

б) $9x^2 + 12x + 29 = 0$
Решение:
Здесь ***a* = 9, *b* = 12, *c* = 29**. Следовательно,
$D = b^2 - 4ac = 12^2 - 4*9*29 = 144 - 1044 = -900$,

$$\sqrt{D} = \sqrt{-900} = \sqrt{900 \cdot (-1)} = 30i.$$

$$x_1 = \frac{-12 - 30i}{18} = \frac{6(-2 - 5i)}{18} = \frac{-2 - 5i}{3} = -\frac{2}{3} - \frac{5}{3}i;$$

$$x_2 = \frac{-12 + 30i}{18} = \frac{6(-2 + 5i)}{18} = \frac{-2 + 5i}{3} = -\frac{2}{3} + \frac{5}{3}i.$$

Замечание: если дискриминант квадратного уравнения отрицателен, то квадратное уравнение имеет два сопряженных комплексных корня.

Задания для самостоятельной работы №5.
Решите уравнение:

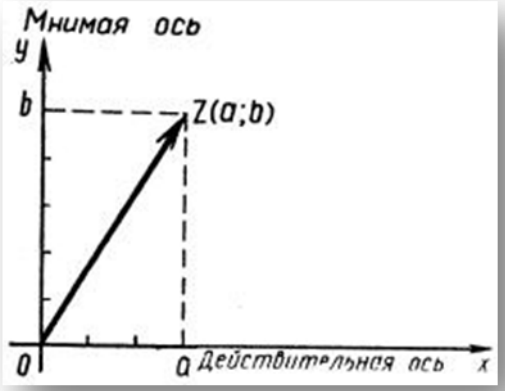
56. $x^2 - 4x + 13 = 0$.
57. $x^2 + 3x + 4 = 0$.
58. $2{,}5x^2 + x + 1 = 0$.
59. $4x^2 - 20x + 26 = 0$.

5. Геометрическая интерпретация комплексного числа

Каждое комплексное число z = a + bi можно геометрически изобразить на плоскости точкой Z(a;b) или как вектор OZ с началом в точке O(0;0) и концом в точке
Z (a;b)

Определение: Плоскость, точкам которой сопоставлены комплексные числа, называется **комплексной плоскостью.**

Определение: Действительные числа изображаются точками оси абсцисс, которую называют **действительной** (или *вещественной*) **осью**; чисто мнимые числа – точками оси ординат, которую будем называть **мнимой осью**.



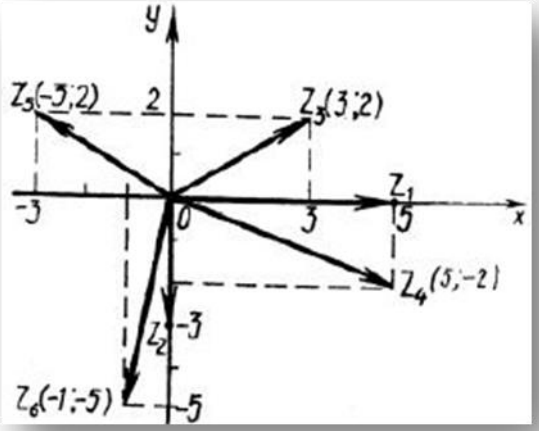
Например:

Изобразить на плоскости числа

$z_1 = 5$; $z_2 = -3i$;

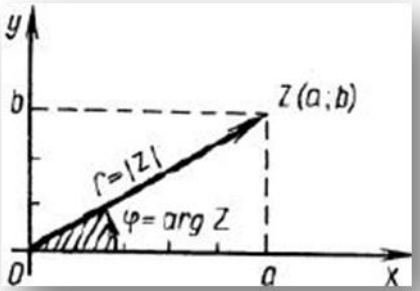
$z_3 = 3 + 2i$; $z_4 = 5 - 2i$;

$z_5 = -3 + 2i$; $z_6 = -1 - 5i$.



Из определений суммы и разности следует, что комплексные числа складываются и вычитаются, как векторы.

6. Тригонометрическая форма комплексного числа.



Пусть комплексное число $z = a + bi$ изображено в виде вектора с началом в точке $O(0; 0)$ и концом $Z(a; b)$.

Определение: **Модулем** комплексного числа $z = a + bi$ называется длина вектора, которую можно найти по формуле $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Часто модуль комплексного числа обозначают - r

Определение: **Аргументом** комплексного числа называется угол φ, который образует вектор с положительным направлением оси абсцисс. Величину угла φ можно найти с помощью формул: $\cos\varphi = \frac{a}{r}$, $\sin\varphi = \frac{b}{r}$

Эта система имеет бесчисленное множество решений вида $\varphi + 2\pi\kappa$, где k – любое целое число. Таким образом, любое комплексное число z имеет бесконечное множество аргументов, отличающихся друг от друга на число, кратное 2π

Если $k = 0$, то мы получим главное значение аргумента φ, которое и будем называть аргументом комплексного числа.

Из соотношений

$\cos\varphi = \frac{a}{r}$ и $\sin\varphi = \frac{b}{r}$

Следует: $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$.

Если в запись комплексного числа **z** вместо **a** и **b** подставить эти значения, то получим

$z = a + bi = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Определение: Получили новую форму записи комплексного числа: $\boldsymbol{z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}$, которая называется ***тригонометрической формой*** **комплексного числа.**

Сформулируем правило перехода от алгебраической формы комплексного числа к тригонометрической.

1. Находят модуль комплексного числа r, для чего используют формулу $r = \sqrt{a^2 + b^2}$

2. Для нахождения φ сначала определяют геометрически, в какой четверти находится точка z.

3. Составляют уравнения $\cos\varphi = \frac{a}{r}$ и $\sin\varphi = \frac{b}{r}$ и по решению одного из них находят угол φ.

4. Записывают комплексное число z в тригонометрической форме.

Например: Записать в тригонометрической форме комплексное число $z = 1 + i$.

Решение:

1. т.к. a=1, b=1, то $r = |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

2.изобразим число z геометрически.

Числу z соответствует точка Z(1;1) лежащая в I четверти

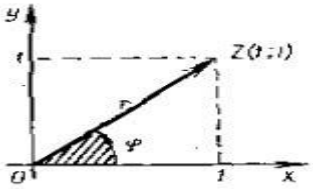


Рис.4

3. составим соотношение $\cos\varphi = \frac{a}{r}$ и $\sin\varphi = \frac{b}{r}$

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Этим соотношениям соответствует в I четверти угол $\varphi = 45^0$ или $\varphi = \frac{\pi}{4}$

4. т.к. $r = \sqrt{2}$; $\varphi = 45^0$ или $\varphi = \frac{\pi}{4}$ то тригонометрическая форма заданного комплексного числа имеет вид

$$z = 1 + i = \sqrt{2}(\cos 45° + i\sin 45°)$$

Например: Записать число z= $-2 + 2i\sqrt{3}$ в тригонометрической форме

Решение:

1. a=-2; b= $2\sqrt{3}$,r = $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 12} = \sqrt{16} = 4$

2. изобразим число z геометрически.

Числу z соответствует точка Z(-2; $2\sqrt{3}$) лежащая во II четверти

3. находим : $\cos\varphi = \frac{a}{r} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$;

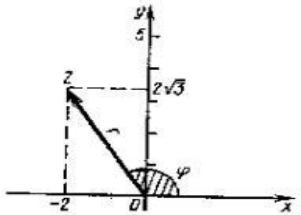


Рис.5

$$\sin\varphi = \frac{b}{r} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Этим соотношениям соответствует угол φ = 180° – 60° =120°

4. Запишем заданное число в тригонометрической форме:

$$z = -2 + 2i\sqrt{3} = 4(\cos 120^0 + i\sin 120^0)$$

Например: Записать в тригонометрической форме чисто мнимое число $z = -3i$.

1. т.к a=0; b=-3, $r = |z| = \sqrt{0^2 + (-3)^2} = \sqrt{9} = 3$

2. Точка, соответствующая геометрически числу $z = -3i$, лежит на мнимой оси

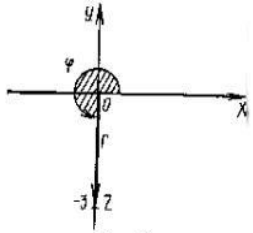


Рис.6

3.Аргумент этого числа равен $\frac{3\pi}{2}$, так как угол отсчитывается от положительного направления оси OX против часовой стрелки

4. Запишем данное число в тригонометрической форме:

$$z = 3(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2})$$

Задания для самостоятельной работы №6.

Запишите в тригонометрической форме комплексные числа:

$60. z = \sqrt{3} + i$	$61. z = 5$
$62. z = -3 + 3i$	$63. z = -10$
$64. z = 2\sqrt{2} - 2i\sqrt{6}$	$64. z = 6i$

7. Действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме.

Тригонометрическая запись комплексного числа удобна для выполнения операций умножения, деления, возведение в степень и извлечения корня.

1) *умножение комплексных чисел выполняется по формуле*:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2 + \sin\varphi_2) = r_1 \cdot r_2((\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2$$
$$+ i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)) = r_1 r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$$

Например: Умножить числа

$$z_1 = 2(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}); z_2 = 3(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$$

Решение:

$$z_1 \cdot z_2 = 2\cdot 3(\cos(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3})) = 6(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12})$$

2)*деление комплексных чисел выполняется по формуле:*

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2))$$

Например: Найти частное комплексных чисел:

$$z_1 = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}), z_2 = 2(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3})$$

Решение:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin(\frac{\pi}{4}-\frac{5\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{4}-\frac{5\pi}{3})) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos(-\frac{17\pi}{12}) + i\sin(-\frac{17\pi}{12}) =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12})$$

3)*возведение в степень.*

Из формул умножения и деления можно вывести общее правило возведения комплексных чисел в целую степень, называемое формулой *Муавра*.

$$z^n = (r(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

Например: Вычислить: $(1+i)^{30}$

Решение: Найдем тригонометрическую форму числа 1+i.

Получаем $1+i=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$,тогда

$$\left(1+i\right)^{30}=(\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}))^{30}=\left(\sqrt{2}\right)^{30}(\cos\frac{30\pi}{4}+i\sin\frac{30\pi}{4})=$$

$$=2^{15}\left(\cos(6\pi+\frac{6\pi}{4})+i\sin(6\pi+\frac{6\pi}{4})\right)=2^{15}(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2})=-2^{15}i$$

4) *извлечение корня выполняется по формуле:*

$$z_m=\sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi+2\pi m}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi m}{n}), m=0,1,2...,n-1$$

Например:

а) Вычислить $\sqrt[3]{\sqrt{3}-i}$

Решение: Имеем: $\sqrt{3}-i=2(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6})$

Отсюда:

$$z_m=\sqrt[3]{\sqrt{3}-i}=\sqrt[3]{2(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}}=\sqrt[3]{2}(\cos\frac{\frac{11\pi}{6}+2\pi m}{3}+i\sin\frac{\frac{11\pi}{6}+2\pi m}{3})$$

где m=0,1,2

$$z_0=\sqrt[3]{2}(\cos\frac{11\pi}{18}+i\sin\frac{11\pi}{18})$$

$$z_1=\sqrt[3]{2}(\cos\frac{23\pi}{18}+i\sin\frac{23\pi}{18})$$

$$z_2=\sqrt[3]{2}(\cos\frac{35\pi}{18}+i\sin\frac{35\pi}{18})$$

б) Найти $\sqrt[4]{1}$

$$z_m=\sqrt[4]{1}=\sqrt[4]{\cos 0+i\sin 0}=\sqrt[4]{1}(\cos\frac{0+2\pi m}{4}+i\sin\frac{0+2\pi m}{4})=\cos\frac{\pi m}{2}+i\sin\frac{\pi m}{2}$$

где m=0,1,2,3

$$z_0=\cos 0+i\sin 0=1,$$

$$z_1=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i,$$

$$z_2=\cos\pi+i\sin\pi=-1,$$

$$z_3=\cos(\frac{3\pi}{2})+i\sin(\frac{3\pi}{2})=-i$$

в)Найти $\sqrt[3]{i}$

$$z_m=\sqrt[3]{i}=\sqrt[3]{1(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}}=\sqrt[3]{1(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi m}{3}+i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi m}{3})}=$$

$$=\cos\frac{\pi+4\pi m}{6}+i\sin\frac{\pi+4\pi m}{6}$$

где m=0,1,2

$$z_0=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}(\sqrt{3}+i),$$

$$z_1=\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}=\frac{1}{2}(-\sqrt{3}+i),$$

$$z_2=\cos\frac{9\pi}{6}+i\sin\frac{9\pi}{6}=-i$$

Задания для самостоятельной работы №7.

65.Вычислите, z^{21} где z равно

а) 1+i б) $\frac{\sqrt{3}-i}{1+i}$

в) $\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}$ г)1-i

66. Даны числа:

$$z_1=\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}, z_2=\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}, z_3=\cos\frac{\pi}{24}+i\sin\frac{\pi}{24}$$

Вычислить:

а) $z_1z_2z_3$, б) $\frac{z_1}{(z_2z_3)}$, в) $\frac{z_1z_3}{z_2}$, г) $\frac{z_1z_2}{z_3}$

67. Вычислите корни и результат изобразите на комплексной плоскости:

а) $\sqrt[4]{i}$ б) $\sqrt[3]{-1}$

в) $\sqrt[4]{-4}$ г) $\sqrt[5]{-1+i}$

д) $\sqrt[6]{2-2i\sqrt{3}}$

Литература

1. Алгебра и начала анализа: учеб. для 10 – 11кл.общеобразоват. учреждений/ [А.Н.Колмогоров, А.М.Абрамов и др.]; под ред.А.Н. Колмогорова – М.Просвещение.
2. Апанасов П.Т., Орлов М.И. Сборник задач по математике: Учеб.пособие для техникумов- М.Высш.шк.
3. Алгебра и начала анализа: учеб. для 10- 11кл.общеобразоват. учреждений Ш.А.Алимов, Ю.М.Колягин и др.- М.:Просвещение.
4. Дадаян А.А.Математика: Учебник.- М.: ФОРУМ.
5. А.В.Могилев, Н.И.Пак и др. «Информатика: учебное пособие для студентов техникума»,М.: Издательский центр «Академия».
6. Филимонов Е.В., Тер –Симонян Н.А. Математика и информатика: учеб. пособие. – М.: « Маркетинг».
7. Валуцэ И.И., Дилигул Г.Д.Математика для техникумов на базе средней школы: учеб. пособие. – М.: Наука. Гл. ред. Физ. - мат. Лит.
8 Справочник по математике для средних учебных заведений. Цыпкин А.Г./под ред. С.А.Степанова – М.: Наука. Гл. ред. Физ. - мат. Лит.
9. Зайцев И.Л. Курс высшей математики для техникумов. - М.: Физматгиз.
10. Баврин И.И., Матросов В.Л. Высшая математика: учеб. для студ. высш. учеб.заведений -М.: Гуманит. Изд.центр ВЛАДОС.

Содержание

Введение……. 2
1. Понятие мнимой единицы…… 3
2. Степень мнимой единицы…… 3
Задание для самостоятельной работы №1…….. 4
3. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И СВОЙСТВА…… 5
Задание для самостоятельной работы №2……. 5
Задание для самостоятельной работы №3……. 7
Задание для самостоятельной работы №4……. 9
4. Решение квадратных уравнений с действительными коэффициентами…….. 10
Задание для самостоятельной работы №5……. 11
5.Геометрическая интерпретация комплексного числа..12
6.Тригонометрическая форма комплексного числа….. 14
Задание для самостоятельной работы №6…….. 17
7.Действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме……... 18
Задание для самостоятельной работы №7…… 20